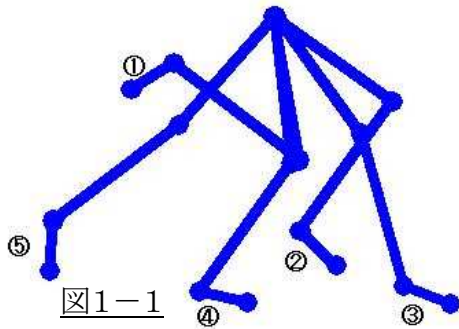


ピッチとスピードの関係解明の試み

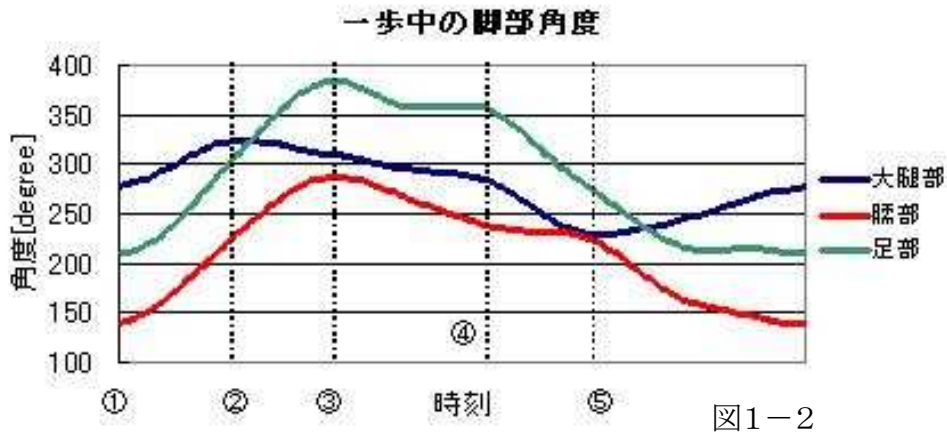
スピードがピッチと線型関係になる理由を数値モデルを使って探ります。

1. TV映像からランニングフォームを数値化

ランナー脚部のスイングの様子を図1-1に示します。①、②～⑤の順に進行します。



TV映像からランナーの脚の角度を1往復分デジタル化したのが図1-2です。片脚だけです。①、②～⑤は図1-1の番号に対応します。



青線で示した大腿部の角度を例として取り上げ、正弦波に分解すると図1-3のようになります。直流分は除いています。

図1-3のグラフを足し合わせるると図1-2の青線の交流分になります。

振幅の大きな基本波があり、高調波がその2割以下の振幅で出ています。

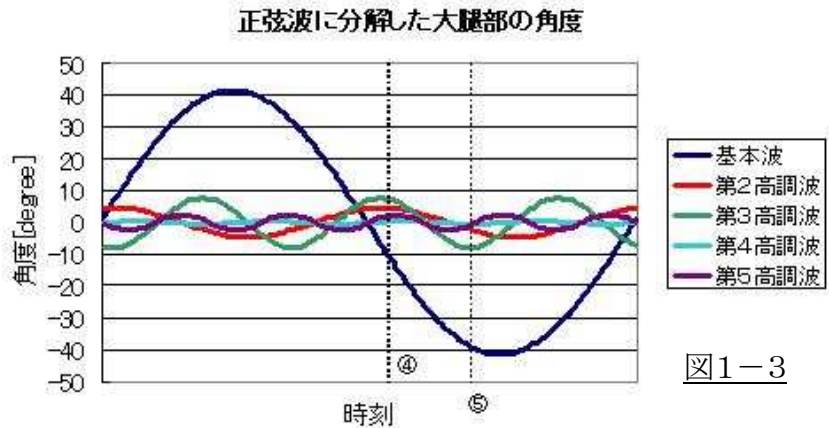


図1-3

図1-3の正弦波の振幅と位相を第6次高調波まで求めたものを表1-1に示します。

	大腿部		膝部		足部	
	振幅[°]	位相[°]	振幅[°]	位相[°]	振幅[°]	位相[°]
直流分	279.4	-	214.4	-	292.5	-
基本波	41.5	-108.4	64.8	-166.9	87.8	-164.6
第2次高調波	4.6	-146.8	20.6	49.0	9.2	47.3
第3次高調波	7.8	-84.0	4.8	156.0	11.4	-148.3
第4次高調波	0.4	-86.3	2.6	124.7	2.0	-24.8
第5次高調波	2.6	-9.6	2.6	77.1	4.4	36.2
第6次高調波	0.9	-6.2	1.7	-164.7	2.2	-86.2

表1-1

ランニングフォームの数値パラメータです。

2. ランナーの瞬時スピード

大腿部の付け根を原点にとって膝の動きを考えると、大腿部の長さは変わりませんから、膝は大腿部の長さL1を半径とする円運動をします。

図1-2の大腿部の角度を $\theta 1$ とすると、膝の位置X1は

$$X1 = L1 \cdot \cos \theta 1 \quad (\text{式 2-1})$$

膝が進行方向に進む速さはV1は

$$V1 = -L1 \cdot \theta 1' \cdot \sin \theta 1 \quad (\text{式 2-2})$$

$\theta 1'$ は $\theta 1$ を時間で微分したもので、図1-2の青線の接線の傾きです。

$\theta 1$ は、図1-3の正弦波に分解できましたから、この正弦波を

$$\phi m = Am \cdot \sin(m \cdot \omega \cdot t + \phi m) \quad (\text{式 2-3})$$

と書きましょう。また、直流分を $\phi 0$ とします。

mは第m次高調波のmと読み替えて下さい。Amは振幅、tは時刻です。

ω は角速度で、脚1往復の時間を 2τ 秒とすると、

$$\omega = \pi / \tau \quad (\text{式 2-4})$$

となります。

ϕm は位相です。

$\theta 1$ を丁寧に書き直すと次のようになります。

$$\theta 1 = \sum \phi m = \phi 0 + \sum Am \cdot \sin(m \cdot \omega \cdot t + \phi m) \quad (\text{式 2-5})$$

これにより、 $\theta 1$ は、次のように微分できます。

$$\theta 1' = \sum \phi m' = \omega \cdot \sum Am \cdot m \cdot \cos(m \cdot \omega \cdot t + \phi m) \quad (\text{式 2-6})$$

(式 2-2)の右辺に入れると

$$V1 = -L1 \cdot \omega \cdot \{ \sum Am \cdot m \cdot \cos(m \cdot \omega \cdot t + \phi m) \cdot \sin \theta 1 \} \quad (\text{式 2-7})$$

膝が進行方向に進むスピードV1に、 ω が比例の形で出ました。

同様のことが臍部や足首から先の足部にも言えて、これらを足し合わせれば、大腿部の付け根を原点としたつま先のスピードになります。

ω とピッチの関係を見ておきましょう。ピッチは毎分の歩数ですから、60秒で両脚が何往復するか、という値になります。片脚1往復が 2τ 秒でしたから、

$$\text{ピッチ} = 60\text{秒} / 2\tau\text{秒} \times 2 = (60 / \pi) \cdot \omega \quad (\text{式 2-8})$$

よって

$$\omega = \pi / 60 \cdot \text{ピッチ} = 0.052359878 \cdot \text{ピッチ} \quad (\text{式 2-9})$$

ピッチと ω は比例係数が違うだけで、同格の変量です。

(式 2-7)で ω が比例の形で出たと言うことは、ピッチが比例の形で出たということになります。

ところで、(式 2-7)をよく見ると、高調波の次数 m が ω に掛かる形で出ています。

この例では、第3高調波の振幅は基本波の2割程度に過ぎませんがスピードには基本波の6割程度の振幅として寄与します。脚を大きく振って如何にも速く走っているように見えるのに全然追いつけない、という場合はこのあたりに原因があるのでしょうか。

ここまでは、ある時刻の一瞬におけるスピードを見てきました。

しかし、(式 2-7)のままでは Runpippi Jr. のモデル式

$$V = \text{係数} \times \text{ピッチ} - \text{定数}$$

と形が一致しません。(式 2-7)に定数項はありません。

3. 一歩のスピード

ここからは一歩のスピードを考えてみます。

そのために、一歩の内で、接地しているときに進む距離と跳躍しているときに進む距離に分けて考えます。

3.1 接地距離

接地しているときに進む距離、略して接地距離ですが、これは着地して離地するまでに大腿部の付け根が進む距離です。

時刻 t_1 に位置 $X(t_1)$ に着地し、時刻 t_2 に位置 $X(t_2)$ で離地するとすれば、次のようになります。

$$\text{接地距離} = X(t_2) - X(t_1) \quad (\text{式 3-1})$$

大腿部の長さを L_1 、臍部の長さを L_2 、靴底のつま先を除いた可動部の長さを L_3 とし、臍部および靴底の角度を θ_2 、 θ_3 とすると、大腿部の付け根の位置 $X(t)$ は次のようになります。

$$X(t) = -L_1 \cdot \cos \theta_1 - L_2 \cdot \cos \theta_2 - L_3 \cdot \cos \theta_3 \quad (\text{式 3-2})$$

3.2 跳躍距離

時刻 t_2 における進行方向のスピード V_x と上向き方向のスピード V_y で決まります。

上向きのスピードは重力によって毎秒 9.8 [m/s] 減速し、跳躍時間の半分の時にスピードが 0 になります。つまり $V_y - 9.8 \cdot \text{跳躍時間} \div 2 = 0$ となるので、これを解いて

$$\text{跳躍時間} = V_y / 4.9 \quad (\text{式 3-3})$$

水平方向のスピードは変わりませんから、跳躍時間に進行方向に進む距離は

$$\text{跳躍距離} = V_x \cdot \text{跳躍時間} = V_x \cdot V_y / 4.9 \quad (\text{式 3-4})$$

V_x は、(式 3-2) を時間で微分して得られます。 V_y は(式 3-2) の \cos を \sin で置き換えて微分すれば得られます。

(式 2-7) は V_x の項の 1 つになります。

3.3 一歩のスピードの式

$$\begin{aligned} \text{一歩のスピード} &= \text{1歩の距離} / \text{1歩の時間} \\ &= (\text{接地距離} + \text{跳躍距離}) / \text{1歩の時間} \\ &= (X(t_2) - X(t_1) + V_x \cdot V_y / 4.9) / \tau \quad (\text{式 3-5}) \end{aligned}$$

これを延々と展開しても見通しが良いとは思えないので、第1節で挙げた「ランニングフォームの数値パラメータ」を使って数値実験をします。

3.4 数値実験

脚の部位の長さを次のように置きます。

$L_1 = 39.6$ cm 大腿部の長さ

$L_2 = 44.2$ cm 臍部の長さ

$L_3 = 13.5$ cm 靴底の、つま先を除いた可動部の長さ

ピッチは $175 \sim 190$ [歩/分] とします。

着地時刻と離地時刻は接地の時間帯付近を探って、次のように求めます。

t_1 : 上向きの加速度が増加して 1 [G] を超える時刻

t_2 : 上向きの加速度が減少して 1 [G] を下回る時刻

※(式 3-2) の \cos を \sin に置き換えると大腿部の付け根の高さになります。

高さを時間で微分すると上向きのスピードになり、これをもう一度時間で微分すると上向きの加速度になります。

さて、こうして勇躍、数値計算を試みたのですが、単純にピッチだけを変えて計算すると、まずいことが起きます。

「ランニングフォームの数値パラメータ」で計算した**接地時間[秒]**と**跳躍時間[秒]**の和は、**60秒/ピッチ**と等しくならなければならないのですが、**かけ離れた値**になるのです。

(式 2-5)を見ると、 ω の他に変量に振幅 A_m があり位相 ϕ_m があり、直流分 ϕ_0 もあります。「ピッチを変える」とは ω を変えることに他なりません、これを勝手に変えることは出来ないということです。

パラメータ数は表 1-1 に示すように合計39もあり、これらを ω の変化に応じて変化させなくてはならないので途方に暮れます。

気を取り直して、……

ピッチを変えたとき、パラメータがバラバラに変化することは無いであろうと考え、次のようにモデルを限定しました。

①振幅が一様に一定割合で変化する。

すなわち、 $A_m \rightarrow A_m \cdot \text{振幅調整係数}$ 。

ここに振幅調整係数は(1+微小量)で脚の各部位各高調波に共通とします。

②直流分 ϕ が各部位に共通して一定に変化する。

すなわち、 $\phi_0 \rightarrow \phi_0 + \text{直流分調整量}$ 。

ここに直流分調整量は微小量で脚の各部位に共通とします。

直流分とは振幅の中心ですから、姿勢が前傾するとか後傾すれば一様が変わる、とするものです。

ピッチ毎に、

$$\text{接地時間[秒]} + \text{跳躍時間[秒]} = 60 \text{秒/ピッチ}$$

を満たすように振幅調整係数、直流分調整量を共に微小に振って、一步のスピードを求めてみました。

その結果の表とグラフを以下に示します。

ピッチ [歩/分]	振幅調整 係数	直流分調 整量[度]	X(t1) [m]	X(t2) [m]	接地距離 [m]	接地時間 [秒]	Vx [m/秒]	Vy [m/秒]	跳躍距離 [m]	一步の スピード [m/秒]	ストライド [m]
175.0	0.9899	2.02915	-0.101	0.135	0.236	0.0504	5.57	1.43	1.63	5.44	1.86
177.5	0.9920	1.59564	-0.096	0.141	0.237	0.0497	5.67	1.41	1.63	5.53	1.87
180.0	0.9941	1.18223	-0.091	0.147	0.237	0.0489	5.77	1.39	1.64	5.63	1.88
182.5	0.9961	0.78762	-0.086	0.152	0.238	0.0483	5.86	1.37	1.65	5.73	1.88
185.0	0.9979	0.41064	-0.081	0.157	0.238	0.0476	5.96	1.36	1.65	5.82	1.89
187.5	0.9997	0.05019	-0.077	0.162	0.238	0.0469	6.06	1.34	1.65	5.92	1.89
190.0	1.0015	-0.29471	-0.072	0.166	0.239	0.0463	6.16	1.32	1.66	6.01	1.90
192.5	1.0031	-0.62498	-0.068	0.171	0.239	0.0457	6.25	1.30	1.66	6.10	1.90
195.0	1.0047	-0.94148	-0.064	0.175	0.239	0.0451	6.35	1.29	1.67	6.20	1.91

表 3-1

ピッチに対するスピード

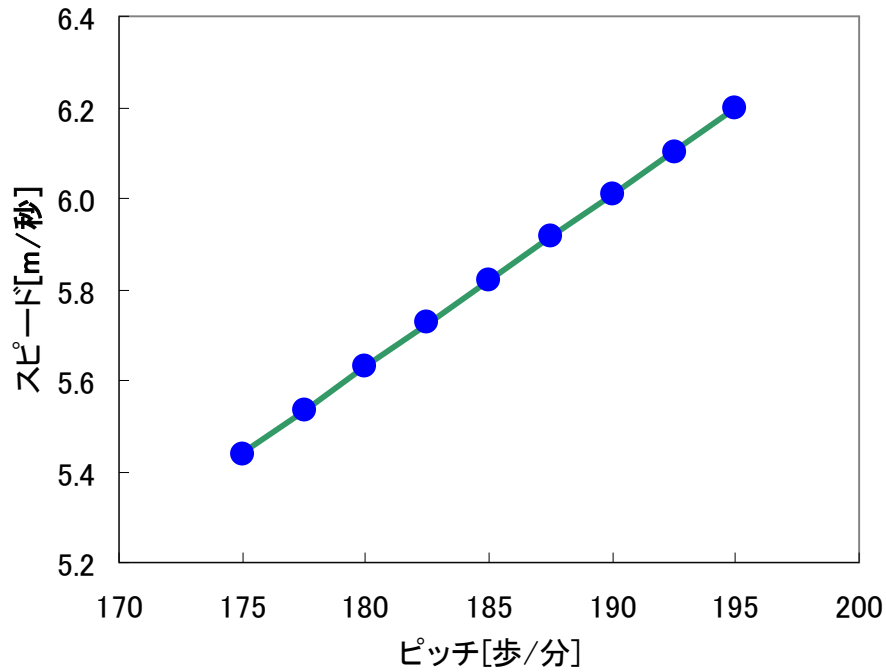


図 3-1

青●はピッチ毎のスピードで緑の線は近似直線です。直線の式は次のようになります。

$$V = 0.03791 \cdot \text{ピッチ} - 1.193$$

定数項が現れて、エリートランナーの実測事例と同じ様な式の形になりました。

直線の当てはまり具合を表す「自由度調整済み重相関係数」は 0.999956 です。

ピッチに対するストライド

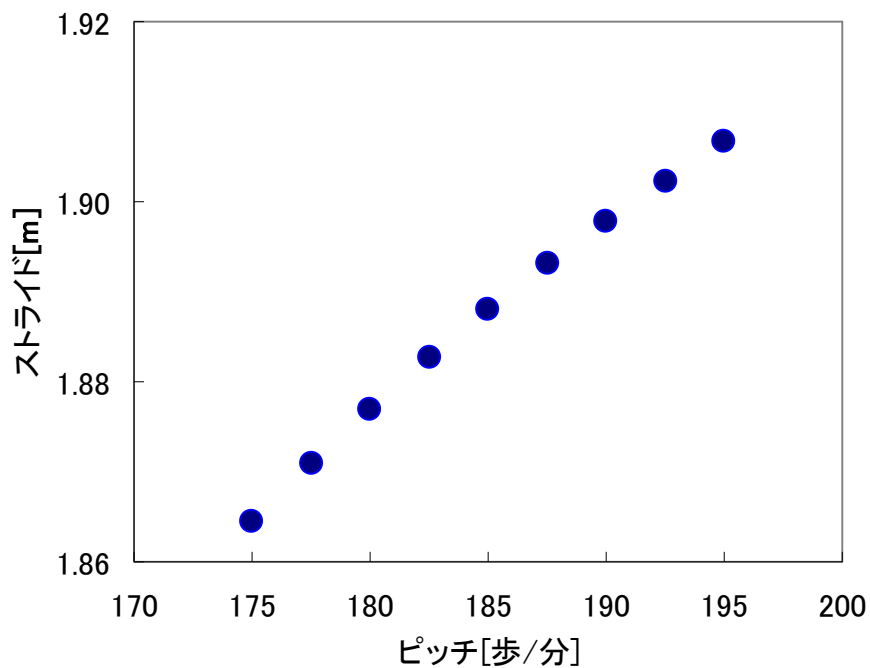


図 3-2

ピッチの増加につれて一步の距離が長くなることも、エリートランナーの実測と合っています。

振幅に乗じるピッチ毎の振幅調整係数

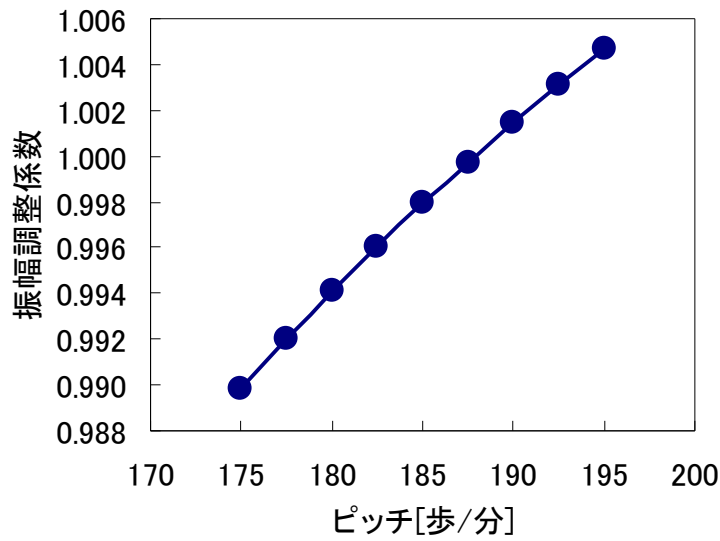


図 3-3

直流分に加えるピッチ毎の調整量

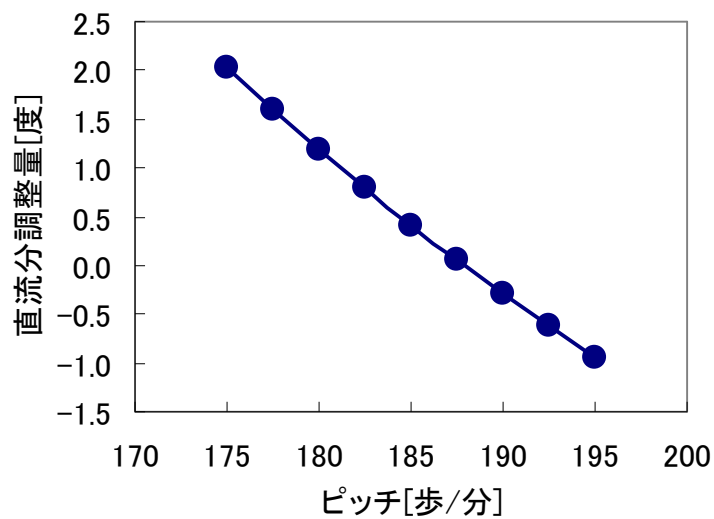


図 3-4

【数値実験の考察】

ピッチとスピードの線型関係

数値実験の条件は次の通りであったことをあらためて記します。

- ①着地時刻と離地時刻における上向加速度は1[G]である。
- ②接地時間[秒]と跳躍時間[秒]の和 = 60秒/ピッチ である。

そのために、

- (a)振幅を、一様に一定割合で変化させてもよい。
- (b)直流分 ϕ_0 を各部位に共通して一定に変化させてもよい。

これらの条件は、ピッチとスピードの線型関係をあらわに指定するものではありませんが、結果として図3-1のように極めて高い直線性が表れました。

振幅調整係数と直流分調整量

ピッチが増えると、振幅が増加し、直流分が減少していることが、図3-3と図3-4より見て取れます。

直流分の減少を図1-1を使って考えると、図を右回りに回転させたフォームに相当します。上体と振幅の中心がなす角度が一定であれば、姿勢の前傾が進むことになります。大腿部の直流分が270度より大ですから、大腿部の振幅の中心は体の前方にあり、それが減少するので、振幅の中心が体の真下である270度に近づいて来ます。

39ものパラメータをこのように単純な方法で制御することでエリートランナーの実測と同様の形が得られたのですから、その単純さ故に尤もらしく思えます。

このような調整が線型関係のための必要条件ではありませんが次のことは言えましょう。

**ピッチを上げ、脚のスイングを大きくし、大腿部の振幅が体の真下になるようにすると
スピードが直線的に増加する。**

蛇足めいた考察を付記します。

振幅調整係数を、ピッチの一次関数で近似すると

$$\begin{aligned} \text{振幅調整係数} &= 0.000813236 \cdot \text{ピッチ} + 0.847328084 \\ &= 0.000813236 \cdot (\text{ピッチ} - 187.7338) + 1 \end{aligned}$$

直流分調整量を、ピッチの一次関数で近似すると

$$\begin{aligned} \text{直流分調整量} &= -0.002838728 \cdot \text{ピッチ} + 0.532925522 \\ &= -0.002838728 \cdot (\text{ピッチ} - 187.7339) \end{aligned}$$

ピッチ 187.73 であれば調整無しで「接地時間[秒]と跳躍時間[秒]の和 = 60秒/ピッチ」を満足できますので、脚部部位長が本実験と同じランナーであれば、このピッチで走ったものと言えましょう。

3.5 数値実験 その2

振幅調整係数や直流分調整量を微小に変化させるというだけで一組の解を得ましたが、他にも多くの解があると思えてなりません。それで、次のような実験を追加しました。

(1) 実験 2-1

ピッチを変えても、条件「接地時間[秒]と跳躍時間[秒]の和 = 60秒/ピッチ」を満たすための調整を「直流分調整量」で吸収し、振幅調整係数を1に固定した実験。

(2) 実験 2-2

ピッチを変えても、条件「接地時間[秒]と跳躍時間[秒]の和 = 60秒/ピッチ」を満たすための調整を「振幅調整係数」で吸収し、直流分調整量を0に固定した実験。

(3) 実験 2-3

ピッチを 187.7338 に固定して直流分調整量を±1度振り、条件「接地時間[秒]と跳躍時間[秒]の和 = 60秒/ピッチ」を満たすための調整を「振幅調整係数」で吸収する実験。

3.5.1 実験2-1の結果

ピッチ [歩/分]	振幅調整 係数	直流分調 整量[度]	X(t1) [m]	X(t2) [m]	接地距離 [m]	接地時間 [秒]	Vx [m/秒]	Vy [m/秒]	跳躍距離 [m]	一歩の スピード [m/秒]	ストライド [m]
175.0	1.0000	1.93868	-0.102	0.135	0.237	0.0502	5.61	1.43	1.64	5.48	1.88
177.5	1.0000	1.52697	-0.097	0.141	0.238	0.0495	5.70	1.41	1.64	5.57	1.88
180.0	1.0000	1.13308	-0.091	0.146	0.238	0.0488	5.79	1.39	1.65	5.66	1.89
182.5	1.0000	0.75597	-0.086	0.152	0.238	0.0482	5.88	1.37	1.65	5.74	1.89
185.0	1.0000	0.39468	-0.081	0.157	0.238	0.0475	5.97	1.36	1.65	5.83	1.89
187.5	1.0000	0.04830	-0.077	0.162	0.238	0.0469	6.06	1.34	1.66	5.92	1.89
190.0	1.0000	-0.28398	-0.072	0.166	0.238	0.0463	6.15	1.32	1.66	6.00	1.90
192.5	1.0000	-0.60294	-0.068	0.171	0.239	0.0457	6.24	1.30	1.66	6.09	1.90
195.0	1.0000	-0.90929	-0.064	0.175	0.239	0.0451	6.33	1.29	1.66	6.17	1.90

表 3-2

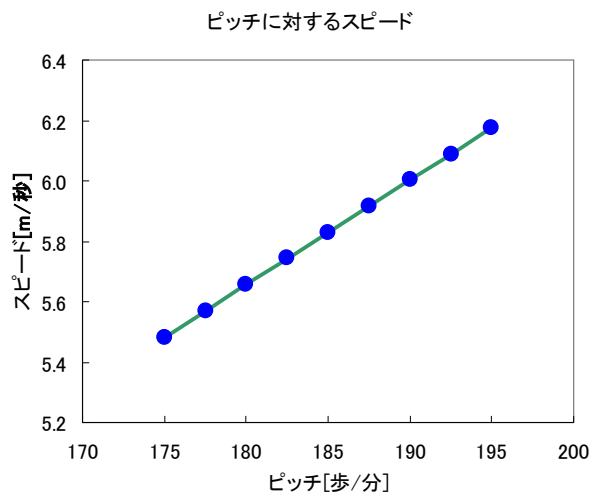


図 3-5

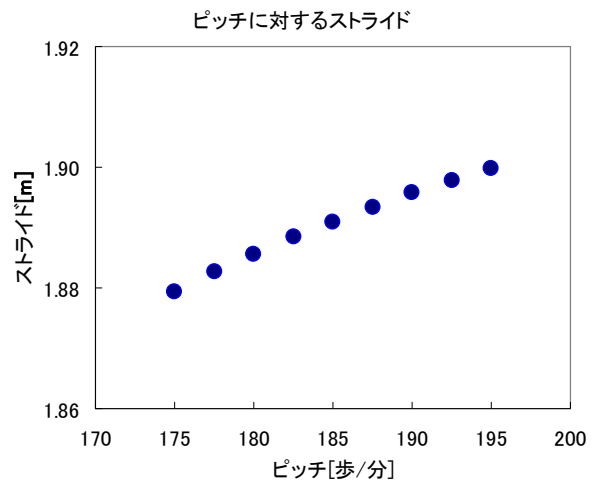


図 3-6

直流分に加えるピッチ毎の調整量

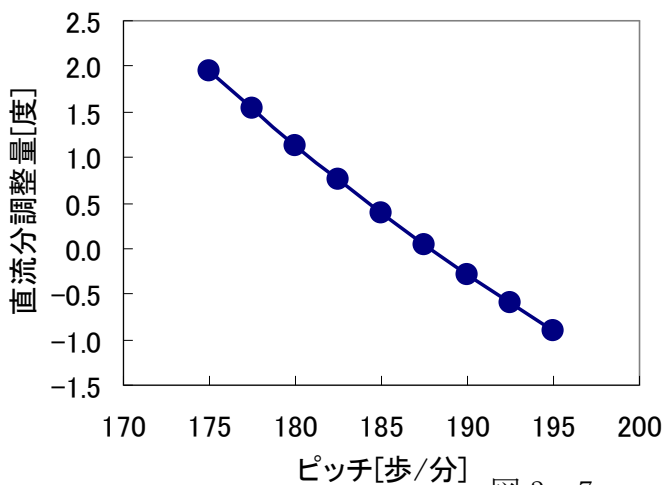


図 3-7

ピッチと直流分調整量を変え振幅調整係数を1に固定した実験です。前節の実験と同様の形になっていますので、これもピッチとスピードの直線性を説明する解の一つであることが分かります。

3.5.2 実験2-2の結果

ピッチ [歩/分]	振幅調整 係数	直流分調 整量[度]	X(t1) [m]	X(t2) [m]	接地距離 [m]	接地時間 [秒]	Vx [m/秒]	Vy [m/秒]	跳躍距離 [m]	一歩の スピード [m/秒]	ストライド [m]
175.0	1.3296	0.00000	-0.144	0.110	0.254	0.0420	6.80	1.47	2.05	6.71	2.30
177.5	1.2356	0.00000	-0.129	0.125	0.254	0.0440	6.60	1.44	1.94	6.49	2.20
180.0	1.1688	0.00000	-0.115	0.136	0.251	0.0451	6.47	1.41	1.86	6.35	2.12
182.5	1.1047	0.00000	-0.101	0.146	0.247	0.0459	6.32	1.39	1.79	6.19	2.03
185.0	1.0522	0.00000	-0.089	0.154	0.243	0.0464	6.20	1.36	1.72	6.06	1.97
187.5	1.0064	0.00000	-0.078	0.161	0.239	0.0468	6.09	1.34	1.66	5.95	1.90
190.0	0.9618	0.00000	-0.066	0.168	0.234	0.0471	5.97	1.32	1.61	5.83	1.84
192.5	0.9181	0.00000	-0.054	0.175	0.229	0.0473	5.85	1.30	1.55	5.70	1.78
195.0	0.8825	0.00000	-0.044	0.180	0.224	0.0473	5.75	1.28	1.50	5.60	1.72

表 3-3

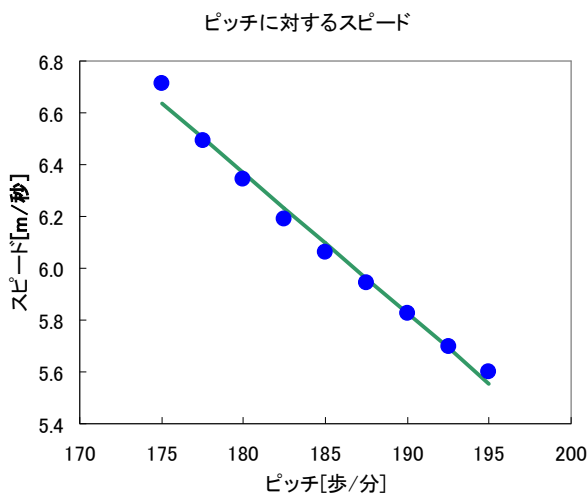


図 3-8

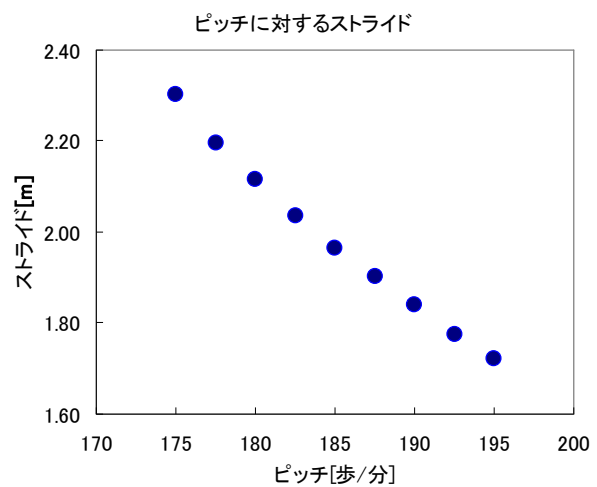


図 3-9

振幅に乗じるピッチ毎の振幅調整係数

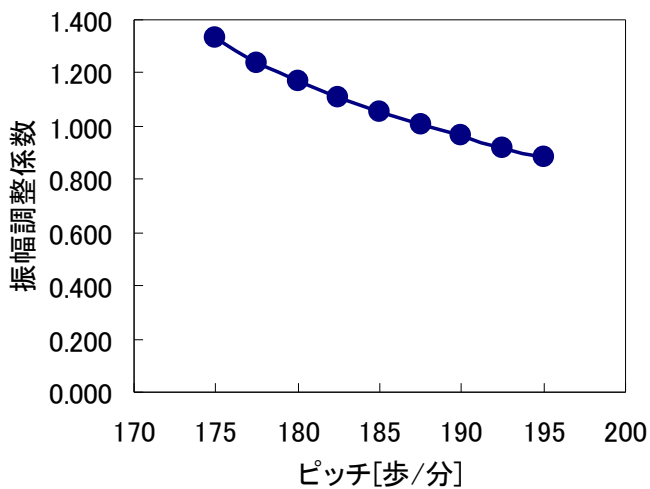


図 3-10

ピッチと振幅調整係数を変え、直流分調整量を0に固定した実験です。

前節の実験とは様相が異なり、ピッチを増加するとスピードが減少しています。同じくストライドも減少しています。ピッチとスピードの直線性を説明する解にはなっていますが、エリートランナーの走りを説明する解にはなっていません。

実際の走りでこのようなパターンが出た場合は、前傾・後姿勢を頑なに守ろうとしていないか、振り返ってみる必要があるでしょう。

3.5.3 実験2-3の結果

ピッチ [歩/分]	振幅調整 係数	直流分調 整量[度]	X(t1) [m]	X(t2) [m]	接地距離 [m]	接地時間 [秒]	Vx [m/秒]	Vy [m/秒]	跳躍距離 [m]	一步の スピード [m/秒]	ストライド [m]
187.7	0.8834	1.00000	-0.058	0.166	0.224	0.0491	5.52	1.33	1.49	5.37	1.72
187.7	0.9027	0.80000	-0.061	0.166	0.227	0.0488	5.62	1.33	1.52	5.47	1.75
187.7	0.9253	0.60000	-0.064	0.165	0.230	0.0483	5.73	1.33	1.55	5.58	1.78
187.7	0.9502	0.40000	-0.068	0.164	0.233	0.0478	5.84	1.33	1.59	5.70	1.82
187.7	0.9758	0.20000	-0.072	0.163	0.236	0.0473	5.96	1.33	1.62	5.81	1.86
187.7	1.0022	0.00000	-0.077	0.162	0.239	0.0468	6.08	1.34	1.66	5.94	1.90
187.7	1.0293	-0.20000	-0.081	0.161	0.241	0.0463	6.20	1.34	1.69	6.06	1.94
187.7	1.0571	-0.40000	-0.085	0.159	0.244	0.0457	6.32	1.34	1.73	6.18	1.97
187.7	1.0863	-0.60000	-0.089	0.157	0.246	0.0451	6.44	1.35	1.77	6.31	2.02
187.7	1.1255	-0.80000	-0.095	0.154	0.249	0.0000	6.60	1.35	1.82	6.47	2.07

表 3-4

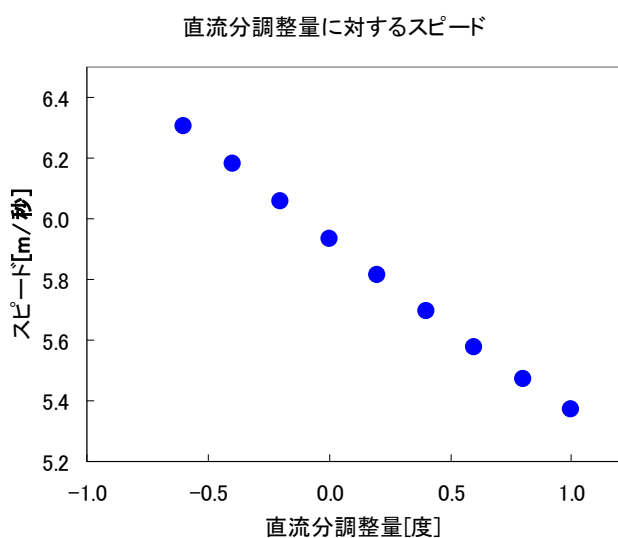


図 3-11

ピッチを 187.7338 に固定して直流分調整量を±1度振り、条件「接地時間[秒]と跳躍時間[秒]の和 = 60秒/ピッチ」を満たすための調整を「振幅調整係数」で吸収する実験です。

同じピッチでも、直流分調整量を変えることを意識するとスピードが変化することが分かります。顔を地面に向けて前傾姿勢を作ると同じピッチでも足の振出が楽になってスピードが上がるという経験がありますがそれと一致します。

同じピッチの走りであるにも関わらず、スピードの精度が低い場合は、走る都度に前傾・後傾姿勢が変化している疑いがあります。

つまり、そのピッチの走りのランニングフォームが身につけていないと言えます。

エリートランナーのピッチとスピードが直線関係にあります。その測定はスピードを変えて走ってもらった結果で、ピッチを意識して走って貰った結果ではありません。練達のランナーはピッチの変化を伴うスピードの制御を行っていることを心しなければなりません。

以上

突っ込み所が満載です。

メールを頂ければ幸いです。

突っ込み、冷やかし、揚げ足取り、何でも結構です。

2009年12月

(有)ケーニヒ 伊藤邦彦 <konig@runpippi.com>